

地震マクロスケッチ II

(べき乗則と破壊過程)

2016年6月19日

河村 廣

はじめ

本談話室の前報スケッチ I では地震の頻度分布から再来周期の略算を試みましたが、本報はその頻度分布に法則性が見られますので、その意味を震源における地殻の破壊過程の数理モデル(本稿では、ピラミッド・樹状ハイブリッドモデル)を用いて明らかにしようとするものです。筆者は別の小窓「新・極限耐震設計論」でべき乗則や自己組織的臨界状態について触れましたが、その具体例の一つとして考察を加えたいと思います。

(震源)地震マグニチュードの累積度数分布

前報ではある一定の地域、期間内に震源の規模がマグニチュード M 以上の地震の発生した累積度数分布を $N(M)$ とすれば(補 1)、次式のように M の関数で与えられることを記しました[1]。式 1 は式 2 の両辺の対数をとったものです。

$$\log N(M) = a' - b M \quad (1)$$

$$N(M) = 10^{a'} \cdot 10^{-b M} \quad (2)$$

上式で a' , b は常数で地域によって異なりますが、 b はリアルな世界において地域や期間に拘らずほぼ 0.7~1.0 程度に収まるとされています。従って、今仮に 1.0 としますと、累積度数 $N(M)$ は式 2 より M が 1 増すごとに 1/10 になること、逆に 1 減ると 10 倍になることなども本談話室の前報で述べました。

(震源)地震マグニチュードと断層長さ

地震の大きさを具体的な物理量、例えば動いた断層長さや余震域の直径などで表すと、私達は地震のイメージを描き易くなり地図上にプロットすることも出来ます。実は、断層長さ(地表の観測値の上限)と余震域の直径が同じ長さとなり L (km) とおけば、マグニチュード M の関数として次式が与えられています[2,3]。式 3 は式 4 の両辺の対数をとったものです。

$$\text{Log } L(M) = -e + f M \quad (3)$$

$$L(M) = 10^{-e} \cdot 10^{f M} \quad (4)$$

上式で e , f は常数でそれぞれ 1.8, 0.5 とされています。例えば、 $M=5$ では $L=5.0$ km、 $M=6$ では $L=16$ km、 $M=7$ では $L=50$ km となり、 M が 1 増えると L は $10^{0.5}$ 即ち約 3 倍になります。

断層(=余震域直径)長さの累積度数分布

ここで式 3 の M を式 1 に代入し M を消去すると次式が得られます。

$$\log N(L) = a' - \frac{eb}{f} - \frac{b}{f} \log L \quad (5)$$

$$N(L) = 10^{a' - eb/f} \cdot L^{-b/f} \quad (6)$$

式 5 は式 6 の対数をとったものですが、式 5 から $\log N$ と $\log L$ が両対数座標軸で負勾配 $-b/f$ の直線関係を示すこと、及び、式 6 は N が L のべき乗で与えられることを示しています。 $b=1$ 、 $f=0.5$ とすれば、 L 以上の地震の発生頻度 N は L^2 、つまり L の二乗に逆比例して減少し、概略再来周期は L の二乗に比例して増大することになります。

N と L はべき乗則を満たしており、自然界や社会において広く見られる自己組織的臨界状態の一例でもある訳です[4]。地震現象の他に具体例としては、雪崩、火災などの災害における破壊過程にも該当することを別の小窓「新・極限耐震設計論」でも既に言及しました。

ピラミッド・樹状ハイブリッドモデルによる実験

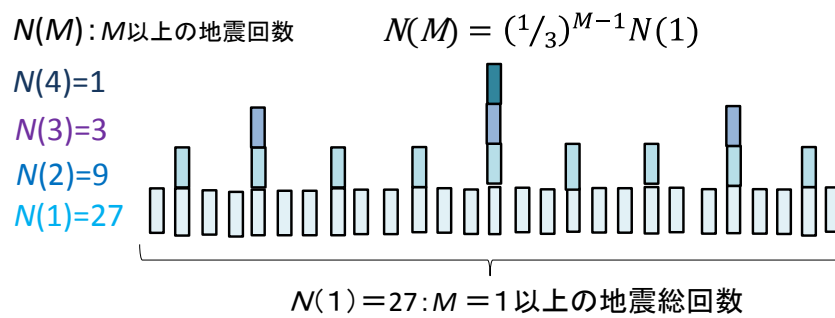


図 1 M 以上の地震の生起回数モデル (ピラミッドモデル)

図 1 は M 以上の地震の生起回数 N が M の増加と共に減少してゆく過程に関する簡単な確率モデル (ここでは、ピラミッドモデルと命名) を描いたものです。

ある地域、ある期間内に生じた $M \geq 1$ の地震の総回数を $N(1)$ とし、図 1 では例として 27 回とおきました。 M 以上の地震の生起回数を $N(M)$ とおけば、 $N(1) = 27$ となります。次いで $M \geq 2$ の地震の生起回数 $N(2)$ を図 1 では $N(1)$ の $1/3$ の 9 回として描いています。この $1/3$ を増大許容率とし確率 p とおいてその p を一定とすれば、 $N(3)$ は $N(1)$ の $(1/3)^2$ の 3 回となります。以上より、 $N(M)$ は一般的に次式のように与えることができます。

$$N(M) = p^{M-1} \cdot N(1) \quad (7)$$

$$\log N(M) = (\log p)(M - 1) + \log N(1) \quad (8)$$

式 8 は式 7 の両辺の対数をとったものです。繰り返しになりますが、上式で $p=1/3$ 、 $N(1) = 27$ とおいたのが図 1 の場合になります。

図 1、式 7、8 は地震の規模 M が 1 ランク上がるたびに、地殻の構造上地震の生起個数が制限されてゆくプロセスを表しており、確率 p は謂わば地震発生に関するハードルなどの制約条件に相当するものと考えられます。

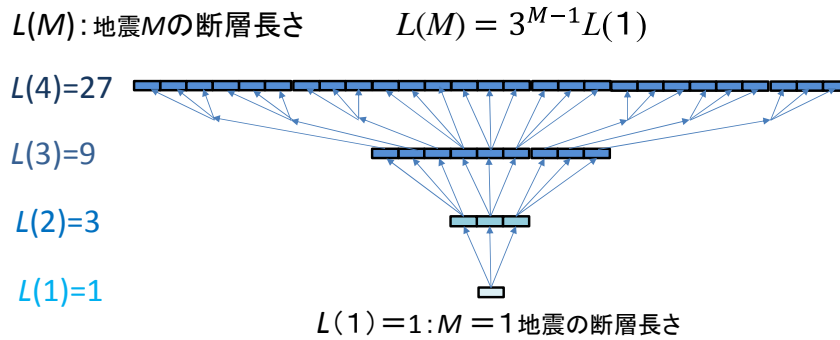


図 2 地震 M による断層長さ L の拡大モデル (樹状モデル)

図 2 は地震 M の増大と共に断層長さ $L(M)$ が拡大倍率 $m = 3$ で拡大してゆく過程を描いた単純化モデル (ここでは、樹状モデルと命名) です。 $M = 1$ の地震時の断層長さを $L(1) = 1$ としますと、 $L(2) = 3 L(1) = 3$ 、 $L(3) = 3^2 L(1) = 9$ 、 $L(4) = 3^3 L(1) = 27$ と増加してゆきます。従って $L(M)$ は一般的に次式で与えられます。

$$L(M) = m^{M-1} \cdot L(1) \quad (9)$$

$$\log L(M) = (\log m)(M - 1) + \log L(1) \quad (10)$$

式 8 と式 10 から M を消去すると、次式を得ます。

$$\log N(L) = \left(\frac{\log p}{\log m}\right) \log L - \left(\frac{\log p}{\log m}\right) \log L_0 + \log N_0 \quad (11)$$

$$N(L) = L^{\frac{\log p}{\log m}} L_0^{-\left(\frac{\log p}{\log m}\right)} N_0 \quad (12)$$

式 12 は式 11 の対数関数表現を指数関数表現に戻したものです。 L_0 は式 9、10 の $L(1)$ を、 N_0 は式 7、8 の $N(1)$ をそれぞれ置き換えたもので、共に常数です。従って、式 12 は L 以上の累積度数分布 $N(L)$ は L のべき乗で与えられることを示しています (補 1)。式 12 の L のべき乗指数が正のように見えますが、 p が増大許容率、即ち確率で 1 より小、また拡大倍率 m は 1 より大ですから、べき乗指数は負となります。

まとめますと、図 1、2 を合成したピラミッド・樹状ハイブリッドモデルの実験により、式 12 のべき乗則の構成が実証されたこととなります。

考察、

ここで注目して頂きたいことは、ピラミッド・樹状ハイブリッドモデル実験による式 7~12 が地震現象の式 1~6 と結論のべき乗則に至るまでよく似ていることです (補 2)。言い換えると、図 1、2 のピラミッド・樹状ハイブリッドモデルは地震現象の単純化された数理モデルとアナロジーを有していることは明らかです。

べき乗則の成り立つ現象が自己組織的臨界状態であると言われますが、その仮説的段階にある自己組織的臨界状態はピラミッド・樹状ハイブリッドモデルによりその仕組みが明

かにされたと言えるでしょう。

累積的頻度に対しては式 7, 8 のように媒介変数 M により指数関数的な減少、即ち抑制効果を、明確な物理量 L に対しては式 9, 10 のように媒介変数 M により指数関数的な増大、即ち拡大効果を各々示し、両者の合成から式 11, 12 のように、両対数軸座標で右下がりのべき乗則が構成されています。この抑制と拡大の均衡が自己組織的臨界状態をもたらしているものと思われます。

とは申しても、これで地震の予知が大きさや時期を明確に出来るわけではありません。何故ならば、図 1 の発生地震の個数はある期間内の総計を列挙したもので、発生順序のことは不問に付されているからです。その期間を発生頻度で割って再来周期の略算を行うことは可能ですが、これは飽くまでも目安に過ぎません。ある地域、ある期間における地震現象の全体集合について法則性は見られますが、個々の地震現象については全くの偶然に任されています。大きなプレッシャーの下である期間に進行する地殻の破壊プロセスにおいて個々の断層やマグニチュードの生じる順序などについては、神のみぞ知るところです。

結び

本報では、地震観測結果において成り立つ地震の断層長さ（≡余震域直径）と累積発生回数との間のべき乗則がピラミッド・樹状ハイブリッドモデル実験結果においても成り立つことを示し、従って自己組織的臨界状態のメカニズムが本稿のピラミッド・樹状ハイブリッドモデルから窺うことが出来ることを明らかにしました。

同時に、上記の法則性は飽くまでもある地域ある期間において発生した総地震回数についてであり、個々の地震現象についての大きさや時期、順序などについては全く偶然であることを示唆していることに注意しなければなりません。

補足 1 :

本報では頻度分布については確率変数 x 以上が生じる(超過)確率の累積確率分布 $N(x)$ としています。実測値や観測値から $N(x)$ を推定する場合任意の x で定義が出来ますし、読み取る確率は超過確率となりますが、 x の刻みの間隔の影響を受けませんから、応用性、実用性共に高くなります。

周知のことですが、確率密度関数 $n(x)$ については x が連続量ならばその近傍のある幅 Δx を乗じた面積の $n(x) \Delta x$ が確率になります。従って逆に、 x が連続量で観測値から $n(x)$ を求めグラフ化して実験式を導く場合は、 Δx のとり方とその後の扱い方に注意しなければなりません。特に、 x 軸がリニアか又は対数かによっても Δx に又は $\Delta \log x$ にすることの数学的意味にも配慮しなければなりません。

従って、机上の理論は兎も角、実証性を大切にするならば、簡明性と扱い易さなどから本稿では上記の累積確率 $N(x)$ で一貫させることにしています。

補足 2 :

地震の生起現象に関する数理モデルとしては浸透理論[5]に属する大塚博士の碁石モデル[6]が有名です。メッシュに切った平面上で一つのメッシュの中に碁石を置きある確率でその碁石が 2 次元的に成長するが、その成長が全て閉ざされた時点で残された碁石の数が地震の大きさとなるというモデルです。ゲーム感覚で子供でも出来る単純なモデルです。

詳細は同文献[6]を参照して頂きたいのですが、本稿のピラミッド・樹状ハイブリッドモデル (図 1、図 2) と原理的には同じです。しかし、理解し易さの点では碁石モデルは視覚的などところに、筆者のモデルは理論的で分析的などところに特色があるように思います。

文献 :

[1]宇津徳治 : 地震学、共立出版、p.130, 昭和 53 年 1 月.

[2]大塚道男 : 地震、第 2 輯、第 18 巻、pp.1~8, 1965.

[3]文献[1] : p.166, p.198.

[4]井庭崇、福原義久 : 複雑系入門、Chapter 5 自己組織的臨界状態、pp.45~59.

[5]堀素夫 : 浸透の理論とその応用、日本統計学会誌、第 3 巻、第 1 号、pp.19~28.

[6]大塚道男 : 地震、第 2 輯、第 24 巻、pp.215~227, 1971.