

## まとめ

先ず再度お断りしておくべきことですが、地震についての科学的認識にはマクロとミクロの2通りの視点がありますが、筆者の一連の考察は前者の途を歩もうとするものです。

フラクタルはマンデルブロが見出した自然界に潜む幾何学です[1]。複雑に見える図形の小さな部分を拡大すると全体（より大きな部分）と同じような形になっているという自己相似性が自然界の造形には多く見られます。この場合は相似性次元と言われますが、一般にフラクタル次元  $D$  がその複雑さの程度を表すとされています。

本稿では、本「耐震・防災・談話室」の「地震現象マクロスケッチⅡ（べき乗則と破壊過程）」で紹介しました G-R 式の累積度数への変換式、大塚博士による地震マグニチュード  $M$  と断層長さ  $L$  の関係式、そして筆者提唱のピラミッド・樹状ハイブリッドモデルを用いて、フラクタルの観点から考察を加え、地震発生現象における上記の自己相似性の意味を断層という視覚的な面から明らかにし、フラクタル次元も求まることを示しました。

マンデルブロは「壊れる」或いは「破片」をイメージして「フラクタル」と名付けたそうですが[1]、実証的にも理論的にも地震現象が地殻の崩壊過程であることを思えば、地震特に断層はフラクタルの典型例と言っても過言ではないでしょう。

## 地震発生現象の自己相似性

おさらいになりますが、ある一定の地域、期間内に震源の規模がマグニチュード  $M$  以上の地震の発生した累積度数分布を  $N(M)$  とすれば、次式のように  $M$  の関数で与えられます[2]。

$$\log N(M) = a' - b M \quad (1)$$

$$N(M) = 10^{a'} \cdot 10^{-b M} \quad (2)$$

従って、累積度数  $N(M)$  は式 2 より  $M$  が 1 増すごとに  $10^{-b}$  倍になり、逆に 1 減ると  $10^b$  倍になります。

一方、断層長さ(地表の観測値の上限)と余震域の直径が同じ長さとなり  $L$  (km) とおけば、マグニチュード  $M$  の関数として次式が与えられています[3,4]。

$$\log L(M) = -e + f M \quad (3)$$

$$L(M) = 10^{-e} \cdot 10^{f M} \quad (4)$$

従って、式 4 より  $M$  が 1 増えると  $L$  は  $10^f$  倍になり、逆に 1 減ると  $10^{-f}$  倍になります。

$M$  を介さないで分かり易く言いますと、 $L$  が  $10^f$  倍になれば  $N$  は  $10^{-b}$  倍になり、 $L$  が  $10^{-f}$  倍になれば  $N$  は  $10^b$  倍になります。式 1, 3 によれば、 $\log L$  が  $f$  だけ増えれば  $\log N$  は  $b$  だけ減り、 $\log L$  が  $f$  だけ減れば  $\log N$  は  $b$  だけ増えることが分かります。

このような  $L$  と  $N$  の増減関係は  $L$  の大きさに依らず成り立ちますので、本稿の冒頭で定義したフラクタル特有の自己相似性と見ることができます。

### 地震発生現象のフラクタル次元

ここで式3の  $M$  を式1に代入し  $M$  を消去すると次式が得られます。

$$\log N(L) = a' - \frac{eb}{f} - \frac{b}{f} \log L \quad (5)$$

$$N(L) = 10^{a' - \frac{eb}{f}} \cdot L^{-\frac{b}{f}} \quad (6)$$

式5は  $\log N$  と  $\log L$  が両対数座標軸で負勾配  $-b/f$  の直線関係を示すこと (図1参照)、及び、式6は  $N$  が  $L$  のべき乗で与えられることを示しています。従って、このような性質もフラクタルの自己相似性に付随するものとなります。

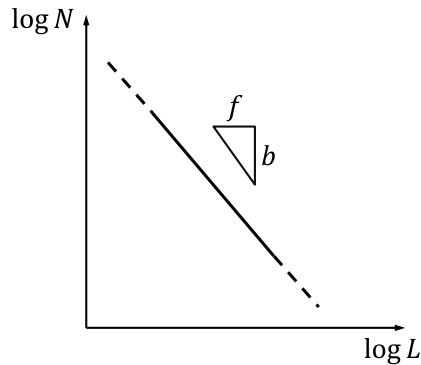


図1 G-R式と大塚式の合成による  $\log N - \log L$  関係

上式の負勾配やべき乗指数  $-b/f$  がフラクタル固有の定数フラクタル次元  $D$  となります。フラクタル次元には定義の仕方でも種々次元が考えられていますが[5]、上記の場合も自己相似性に基づくものですから相似性次元になります。

### ピラミッド・樹状ハイブリッドモデルによる実験

上述のフラクタルの自己相似性やフラクタル次元は図形的な性質ですから、断層とその本数や長さなどを用いたイメージ的な説明があれば理解が容易になるでしょう。

ここで再び本談話室の「地震現象マクロスケッチII」で提示しましたピラミッド・樹状ハイブリッドモデルを引用します。

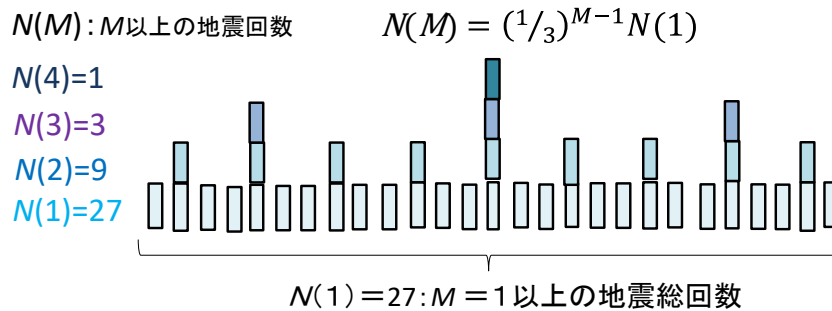


図2  $M$ 以上の地震の生起回数モデル (ピラミッドモデル)

図2は  $M$ 以上の地震の生起回数  $N$ が  $M$ の増加と共に減少してゆく過程を示す確率的なピラミッドモデルを図示したものです。

ある地域、ある期間内に生じた  $M \geq 1$  の地震の総回数を  $N(1)$ とし、図2では例として27回とおきました。 $M$ 以上の地震の生起回数(累積度数)を  $N(M)$ とおけば、 $N(1)=27$ となります。次いで  $M \geq 2$  の地震の生起回数  $N(2)$  を図1では  $N(1)$ の  $1/3$  の9回として描いています。この  $1/3$  を増大許容率とし確率  $p$  とおいてその  $p$  を一定とすれば、 $N(3)$ は  $N(1)$ の  $p^2$  即ち  $(1/3)^2$  の3回となります。以上より、 $N(M)$ は一般に次式のように与えることが出来ます。

$$N(M) = p^{M-1} \cdot N(1) \quad (7)$$

$$\log N(M) = (\log p)(M - 1) + \log N(1) \quad (8)$$

図2、式7、8は地震の規模  $M$ が1ランク上がるたびに、地殻の構造的制約により地震の生起個数が減少してゆくプロセスを表しており、確率  $p$  は謂わば地殻による制約条件に相当するものと考えることが出来ます。

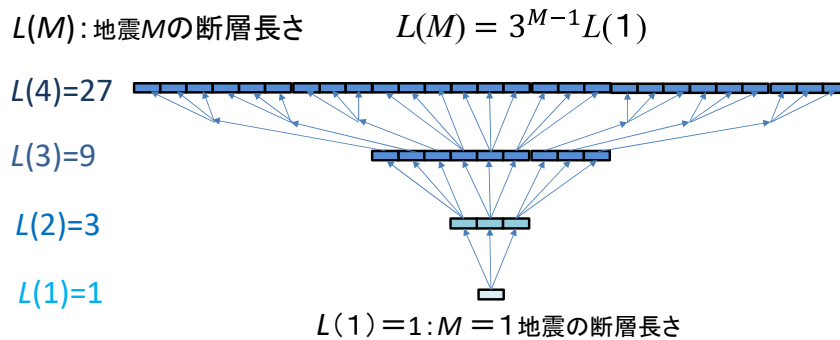


図3 地震  $M$ による断層長さ  $L$ の拡大モデル(樹状モデル)

図3は地震  $M$ の増大と共に断層長さ  $L(M)$ が拡大倍率  $m=3$ で拡大してゆく過程を描いた樹状モデルです。 $M=1$ の地震時の断層長さを  $L(1)=1$ としますと、 $L(2)=3L(1)=3$ 、 $L(3)=3^2L(1)=9$ 、 $L(4)=3^3L(1)=27$ と増加してゆきます。従って  $L(M)$ は一般的に次式で与えられます。

$$L(M) = m^{M-1} \cdot L(1) \quad (9)$$

$$\log L(M) = (\log m)(M - 1) + \log L(1) \quad (10)$$

式8と式10から  $M$ を消去すると、式11を得ます。対数を外せば式12となります。

$$\log N(L) = -\left(\frac{\log p}{\log m}\right) \log L_0 + \log N_0 + \left(\frac{\log p}{\log m}\right) \log L \quad (11)$$

$$N(L) = L_0^{-\left(\frac{\log p}{\log m}\right)} N_0 L^{\frac{\log p}{\log m}} \quad (12)$$

$L_0$ は式9、10の  $L(1)$ を、 $N_0$ は式7、8の  $N(1)$ をそれぞれ置き換えたもので、共に定数です。従って、式12は  $L$ 以上の累積度数  $N$ は  $L$ のべき乗で与えられることを示しています。

式 12 の  $L$  のべき乗指数が正のように見えますが、 $p$  が増大許容率、即ち確率で 1 より小、また拡大倍率  $m$  は 1 より大ですから、べき乗指数は負となります。従って、式 11 は  $\log N$  と  $\log L$  が図 4 のように両対数座標軸で負勾配  $\log p / \log m$  の直線関係を示すことが分かります。

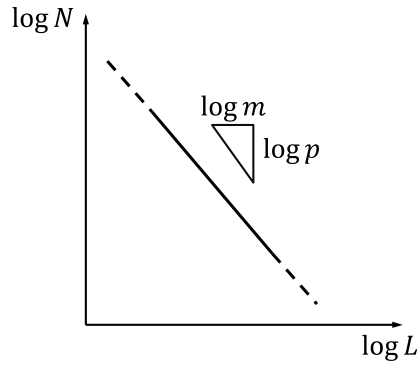


図 4 ピラミッド・樹状ハイブリッドモデルによる  $\log N - \log L$  関係

まとめますと、図 2, 3 を合成したピラミッド・樹状ハイブリッドモデルの実験により、式 12 のべき乗則の構成とフラクタルの自己相似性が証明されたこととなります。式 11, 12 は地震観測から得られた式 5, 6 と同じ形をしていることに注目してください。

### 本稿で得られた知見

本稿では以下のような知見を得ることができました。

(1) 式 11, 12 と式 5, 6 の等価性から、フラクタル次元  $D$  について次式が成り立ちます。

$$D = -\frac{\log p}{\log m} = b/f \quad (13)$$

従って、近似的に文献[6]より  $b \doteq 1$ 、文献[3,4]より  $f \doteq 0.5$  とおけば、地震発生現象のフラクタル次元として、 $D \doteq 2$  が得られます。

(2) 更に、式 1 と式 8、式 3 と式 10 の比較から次式が成り立ちます。

$$\log p = -b \doteq -1 \quad (14)$$

$$\log m = f \doteq 0.5 \quad (15)$$

従って、ピラミッド・樹状ハイブリッドモデルにおける  $p$ 、 $m$  として、

$$p \doteq 10^{-1} = 1/10 \quad (16)$$

$$m \doteq 10^{0.5} \doteq 3 \quad (17)$$

を推定することもできます。

(3) 上記のようにべき乗則の成り立つ現象が自己組織的臨界状態であると言われますが、フラクタル理論に基づく考察を加えることで、地震発生現象の自己相似性のメカニズムのイメージ化やフラクタル次元の定量化も可能になりました。

(4) 図2のピラミッドモデルはG-R式に対応するものですが、図5のように底辺の地震生起回数の総数  $N$  と頂点の最大の  $M$  の増大が前稿「地震エントロピー仮説」の地震エントロピーの増大にも対応しています。更に、余震についてもG-R式が成立するとされていますので[7, 8]、図6のようにトップからボトム、即ち本震の最大の  $M$  から  $M$  が減少する方向に余震は発生して行くことになります。

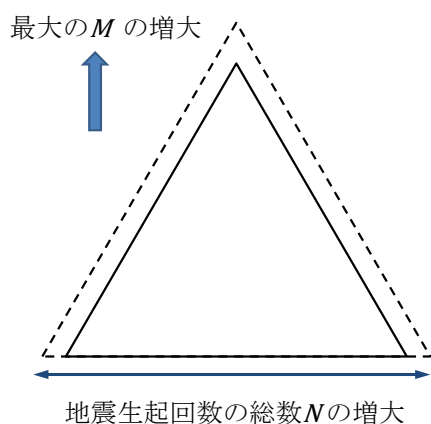


図5 ピラミッドモデルにおける  
エントロピーの増大

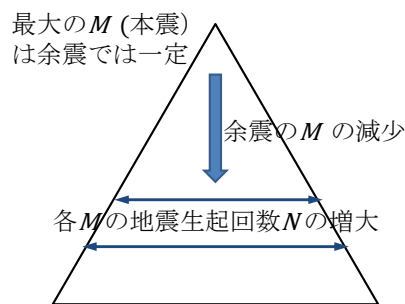


図6 ピラミッドモデルにおける  
余震時下降現象

本震と余震とは地震学的には発生原因が異なっていますが、共に地殻の破壊過程であることからフラクタル的には類似していることになります。

#### 文献：

- [1]ベンワー・マンデルブロ 著、広中平祐 監訳：フラクタル幾何学、日経サイエンス社、1986年3月、一版3刷。
- [2]宇津徳治：地震学、共立出版、p.130, 昭和53年1月、初版3刷。
- [3]大塚道男：地震、第2輯、第18巻、pp.1~8, 1965。
- [4]文献[2]、p.166, p.198。
- [5]高安秀樹：フラクタル、朝倉書店、1986年6月、初版第3刷。
- [6]文献[2]、p.131。
- [7]気象庁ホーム>知識・解説>余震について>余震の発生確率、p.1。  
<http://www.data.jma.go.jp> (2017/03/10)
- [8]文献[2]、p.131、p.175の図7.6 [1945年三河地震 ( $M7.1$ ) の前震と余震及び1965年9月鹿島灘の群発地震のマグニチュード分布 (宇津、1974)。