

まとめ

前稿では地震断層長さ L とその超過累積度数 N が「べき乗則」 $N \propto L^{-D}$ を充たし、そのフラクタル次元（相似性次元） D について $D \doteq 2$ となることを示しましたので、分かり易く D を整数の 2 とおいて、本稿では地震断層面の面積 $S (\propto L^2)$ について、ユークリッド幾何学の 2 次元平面における自己相似性[1]の様相を単純な図形(図 1)により例示しました。

更に図 1 に基づいて 2 次元平面における断層面の一様分布を仮定し、シャノンのエントロピーの定義式[2]から導いた情報量次元 D_I [3] についても $D_I = 2$ を得ました。

地震エントロピーについては、シャノンの情報量の式の順を入れ替えて、累積度数が 1 即ち最大の断層長さの対数とすることの妥当性を示しました。(式 16, 20 及び 図 3, 4)

地震フラクタルの観点からは地震現象はマクロには「べき乗則」に従い、相似性次元を有していますが、ミクロには偶発的で確率的に生じていることが分かります。地震エントロピーの観点からは地震総数は増え続け、そして地震断層長さ（及びそれに対応するマグニチュード）に上限は無いこととなります。

地震断層面積の自己相似性

前稿でも例示しましたが、仮想的なピラミッドモデルから累積度数 N 及び樹状モデルから断層長さ L をマグニチュード M の関数として式 1, 2 で与えました。

$$N(M) = p^{M-1} \cdot N(1) \quad (1)$$

$$L(M) = m^{M-1} \cdot L(1) \quad (2)$$

ここで断層面積 S に着目し、断層長さ L の二乗 L^2 に比例するとして簡単のため正方形と仮定しますと、式 2 より次式が得られます。

$$S(M) = L^2(M) = m^{2(M-1)} \cdot L^2(1) \quad (3)$$

式 1, 3 より各 M における断層面積の総和 $N(M)S(M)$ は次式のようになります。

$$N(M)S(M) = (pm^2)^{M-1} N(1)L^2(1) \quad (4)$$

一方フラクタル次元 D は式 5 で与えられますので、 $D = 2$ とおけば式 6 が成り立ちます。

$$D = -\log p / \log m \quad (5)$$

$$p \cdot m^2 = 1 \quad (6)$$

従って、式 4 は次式となり、断層面積の総和は M によらず一定になります。

$$N(M)S(M) = N(1)L^2(1) \quad (7)$$

前稿で得ました p 、 m から次式の \Rightarrow のように p 、 m を近似的に設定しましょう。

$$p \doteq 10^{-1} \Rightarrow 1/9 \quad (8)$$

$$m \doteq 10^{0.5} \Rightarrow 3 \quad (9)$$

但し、式 5, 6 によればフラクタル次元 $D = 2$ は変わりません。

上記の設定を基に M を媒介変数としてピラミッドモデルと樹状モデルを融合して描いたのが図1です。 M は左上から右回りに 1, 2, 3, 4 となるように配置しています。

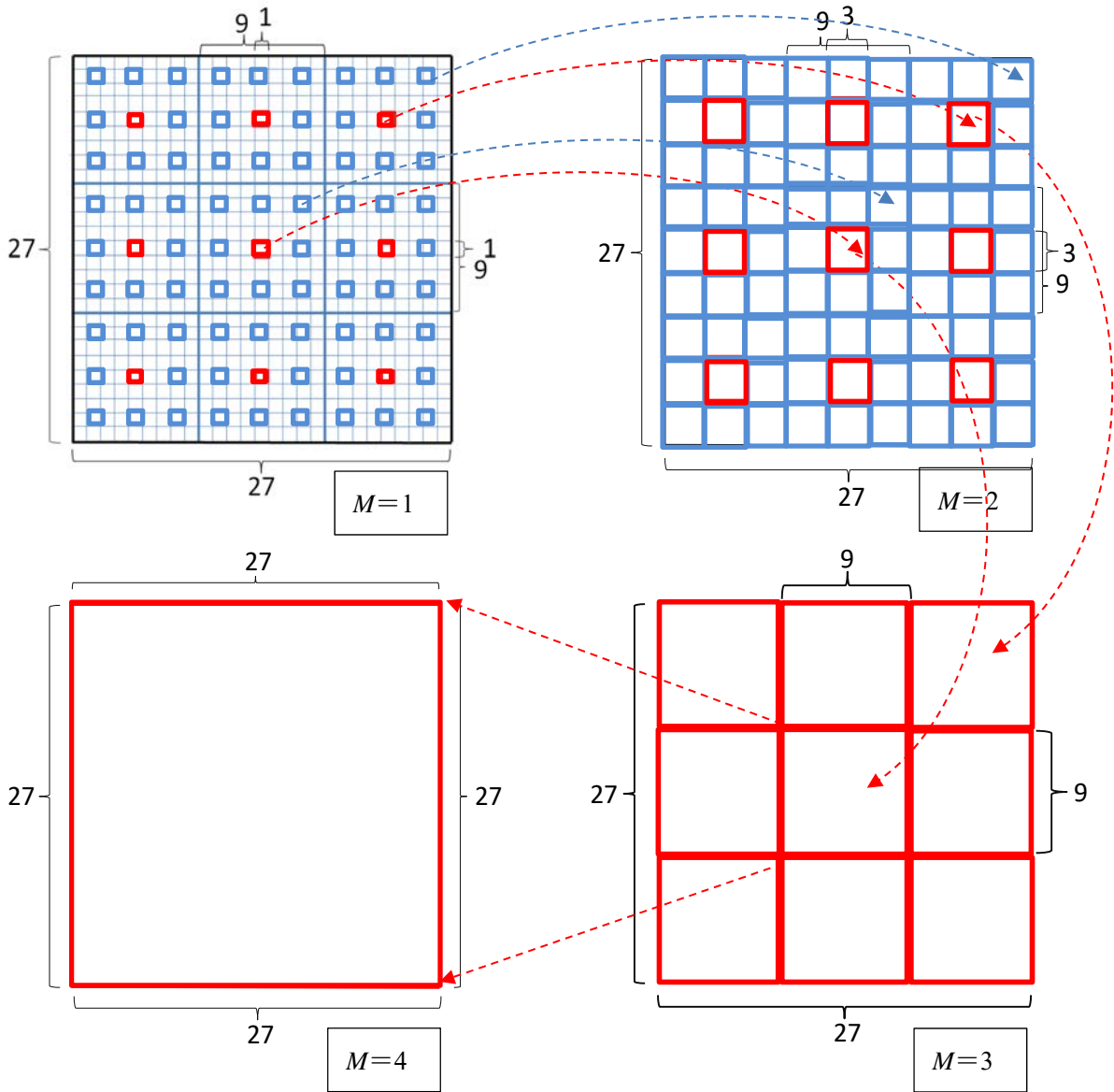


図1 フラクタル2次元空間(平面)における地震断層面の増減の自己相似性

図1では、分かり易い事例として $M=1$ における断層面の総数は $N(1) = 27 \times 27$ 、断層面は正方形と仮定しその1面の断面積は $S(1) = L^2(1) = 1 \times 1$ と設定しています。

$M=1$ における単位断層面 (赤い□) は一辺の倍率 $m=3$ より、 $M=1, 2, 3, 4$ と共に赤い□のように拡大し $M=4$ で打ち止めになります。断層面の数は $M=1, 2, 3, 4$ と共に $1/9$ になり $27 \times 27, 9 \times 9, 3 \times 3, 1$ と減少します。本事例では $M=4$ で断層面が1面となりその減少が停止しますが、 $N(1)$ を $27 \times 27 \Rightarrow (27 \times 3) \times (27 \times 3)$ に設定し直せば $M=5$ まで行くことは作図より明らかです。

本図における赤い□の示す拡大の経緯は樹状モデルに、断層面の数の減少の経緯はピラミッドモデルに相当します。

G-R 式を求める際には、ある地域における一定期間内の地震発生データの集合を対象としており、 M 以上の超過累積度数の地震の震源はその地域内に散在しますが、それらを寄せ集めて、各 M に対応する断層長さの基盤の柵目状に並べ直すという理想化を行っています。

補足すれば、本モデルでは $N(M)$ として M の超過累積度数を用いており、図 1 の M は 1 刻みの離散数ですので、上図での各 $M (\pm 0.5)$ の ΔM 毎における断層面の総数は全体から $1/9$ を引いた数になります。何故ならば、 $1/9$ はひとつ上の $M+1 (\pm 0.5)$ への拡大に転じることになるからです。しかし累積度数を用いれば連続量になるのが大きな利点です。

尚、この経緯は文献[1]で例示されている相似性次元 2 の最も簡単な $m=2, p=1/4$ における解説図と原理は同じですが、若干複雑になっています。

前稿でも言及しましたが、上図で M を 4, 3, 2, 1 と辿れば、余震の過程に対応します。

因みに分かり易さを旨とする例示ですが、 $m=3, p=1/3$ でフラクタル次元 $D=1$ の場合を仮定し、断層長さのみの推移を図示すると図 2 のようになります。但し、式 1, 2 における初期値として $N(1) = 27, L(1) = 1$ を仮定しており、 $N(1)L(1) = 27 = \text{一定}$ 、となります。

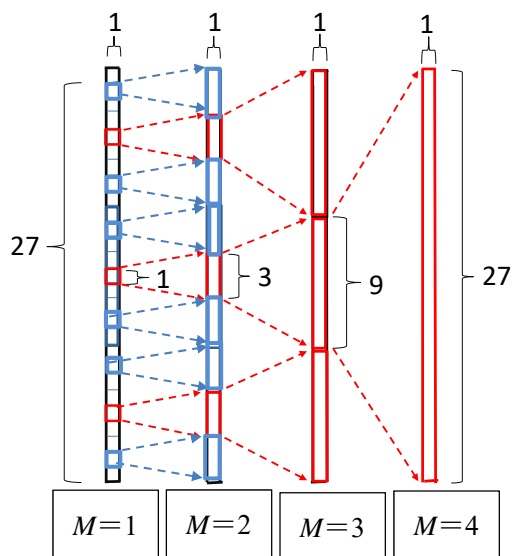


図 2 フラクタル 1 次元空間(直線)における線分の増減の自己相似性

図 2 は前稿のピラミッドモデル及び樹状モデルと同じルール $m=3, p=1/3$ で両者を融合したものですから、立式的な説明はここでは省略します。この経緯は文献[1]で例示されている相似性次元 1 の最も簡単な $m=2, p=1/2$ における解説図と原理は同じですが、若干複雑になっています。

情報量次元 2 の地震エントロピー

シャノンの提唱したエントロピー（又は情報エントロピー）[2]の直感的に分かり易い応用例として、文献[3]ではフラクタル次元の確率論的拡張の情報量次元 2 の場合が簡単に説明されています。同文献を参考に、本稿では図 1 に準拠してもう少し丁寧に情報エントロピーと情報量次元の関係を誘導してみましょう。

シャノンにより情報エントロピー $I(E)$ は式 10 で与えられています[2]。

$$I(E) = -\sum P(E) \cdot \log P(E) \quad (10)$$

但し、 E は生起する事象、 $P(E)$ は事象 E の生じる確率、 Σ は確率空間全域に亘っての総和を各々意味します。

文献[2, 3]で示唆されていますが、式 10 は図 1 の $M=1$ のように全体の面積 S を等しい間隔で碁盤の柁目のように刻んだ 2 次元平面に適用することができます。

例えば碁盤の目の一辺の長さを断層の長さ L として L^2 の小面積の中に震源が一つ入る確率を $P(E)$ とします。更に震源の分布には実際は片寄りがあると思いますが、ある程度広い領域と長い期間における多数の地震を対象として図 1 のように一様と仮定しましょう。

以上より地震の総数 $N(L)$ (L 以上の累積度数)、柁目 L^2 の中に震源の生じる確率 $P(L)$ 、そしてその場合の情報エントロピー $I(L)$ は次式で与えられます。（但し、式 10 中、 $E \rightarrow L$ ）

$$N(L) = S/L^2 \quad (11)$$

$$P(L) = L^2/S \quad (12)$$

$$I(L) = -\sum (L^2/S) \cdot \log (L^2/S) \quad (13)$$

式 13 では、 Σ は震源の一様分布から N 倍におきかえられますから、次式のように単純化されます。

$$\begin{aligned} I(L) &= -N(L) \cdot (L^2/S) \cdot \log (L^2/S) \\ &= \log(S/L^2) = \log N(L) \end{aligned} \quad (14)$$

従って、上式の下段の式から情報エントロピー $I(L)$ は下式のように与えられます。

$$I(L) = \log N(L) = \log S - 2 \log L \quad (15)$$

式 15 の $\log N$ を地震エントロピーと称すると、シャノンの情報エントロピーとの整合性が取れますし、文献[3]では上式中の 2 を情報量次元 D_1 と称されていますので、ここではフラクタル次元と同じ値になります。

一方、図 1 では式 15 の $N(L)$ 及び L は変数ですが、 S は M によらず一定です。しかし S を大きく設定すれば図 1 の最大の M は大きくなります。そこでエントロピーを意味する物理量を S として式 15 を式 16 に変えるほうが、エントロピーの不可逆性のイメージに合致します。

$$\log S = \log N(L) + 2 \log L$$

前々稿の「地震エントロピー仮説」では次式を地震エントロピーと設定しましたが、同じ考え方によります。

$$bM_1^* = \log N(M) + bM \quad (17)$$

但し、 $N = 1$ 即ちある地域ある期間における最大の M を M_1^* としています。

しかし式 17 では地震マグニチュード M を用いており、物理的にも視覚的にも不明瞭です。そこで、 M を大塚の断層長さ $L(\text{km})$ の下式[4]により断層長さ L に置き換えましょう。

$$\log L(M) = -e + fM \quad (18)$$

$N = 1$ 即ちある地域ある期間における最大の L を L_1^* とおき、式 17, 18 より次式を得ます。

$$(b/f) \log L_1^* = \log N(L) + (b/f) \log L$$

前稿の「地震フラクタル仮説」では、 $\log L$ の係数 $b/f \doteq 1/0.5 = 2$ よりフラクタル次元 $D \doteq 2$ と推定しましたので、上式は下式のように式 16 と同じエントロピー式となります。

$$2 \log L_1^* = \log N(L) + 2 \log L \quad (20)$$

参考までに式 16 と式 20 を図 3 と図 4 に示します。図 1 から $L_1^* = 27$, $\log S = 2 \log L_1^*$ は明らかですから、図 3 に付記しています。赤い線分及び矢印はエントロピー増大の方向性を示しています。両式、両図とも同じであることは、図 1 の妥当性を示すものです。

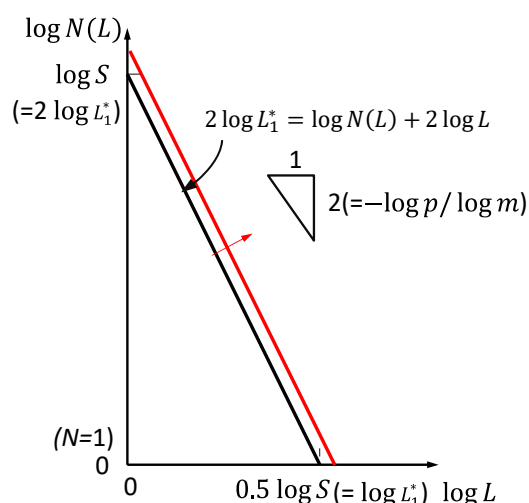


図 3 ピラミッド・樹状モデルの合成による $\log N - \log L$ 関係

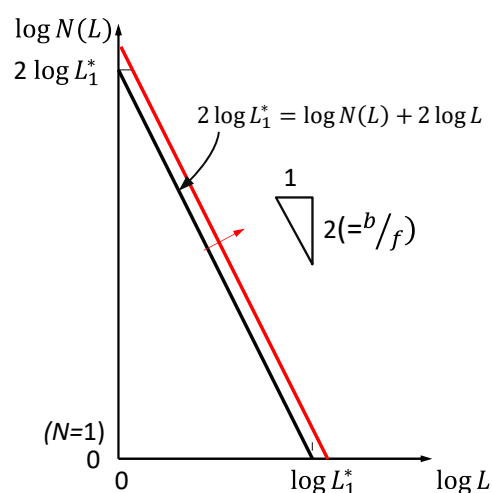


図 4 G-R 式と大塚式 ($\log L - M$ 関係) の合成による $\log N - \log L$ 関係

地震の累積度数 N と断層長さ L の関係で描いた図 3, 4 では、相似性次元や情報量次元 2 が負勾配 -2 で明示され、更に断層面積 S や断層長さ L というイメージし易い物理量で地震フラクタル次元や地震エントロピーを定義することが可能になりました。

文献：

- [1]高安秀樹：フラクタル、p.9、朝倉書店、1986年6月、初版第3刷。
- [2]シャノン、C.E.,ウィーヴァー、W. 著、長谷川淳、川上光洋 訳：コミュニケーションの数学的原理、pp.64,65、明治図書出版、1971年、再版。
- [3]文献[1]、p.17。
- [4]大塚道男：地震、第2輯、第18巻、pp.1~8、1965。